

(6 pages)

OCTOBER 2011

U/ID 32356/UCMF

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

PART A — (10 × 3 = 30 marks)

Answer any TEN questions.

Each question carries 3 marks.

1. Define : characteristic function.

வரையறு : சிறப்பியல்பு சார்பு.

2. Find the glb and lub of the sets.

$$\left\{ \pi + 1, \pi + \frac{1}{2}, \pi + \frac{1}{3}, \pi + \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

$\left\{ \pi + 1, \pi + \frac{1}{2}, \pi + \frac{1}{3}, \pi + \frac{1}{4}, \dots \right\}$ என்ற கணத்தின் மீப்பெரு
கீழ்வரம்பு மற்றும் மீச்சிறு மேல்வரம்பு காண்க.

3. Evaluate : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4}$.

மதிப்பு காண் : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4}$.

4. Define Cauchy sequence.

கோஷி தொடர் வரிசையை வரையறு.

5. If $|x - 2| < 1$, prove that $|x^2 - 4| < 5$.
 $|x - 2| < 1$, எனில், $|x^2 - 4| < 5$ என நிரூபி.
6. Define : Metric space.
வரையறு : மெட்ரிக் வெளி.
7. Define : Open set.
வரையறு : திறந்த கணம்.
8. Define : dense set.
வரையறு : அடர்த்திக் கணம்.
9. Define complete metric space.
வரையறு : முழுமையான மெட்ரிக் வெளி.
10. Define : Uniformly continuous function.
வரையறு : சீரான தொடர் சார்பு.
11. State chain rule for derivatives.
வகைப்படுத்தலுக்கான சங்கிலி விதியை எழுதுக.
12. State Rolle's theorem.
ரோலின் தேற்றத்தை எழுதுக.

PART B — (5 × 6 = 30 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 6 marks.

13. If $f : A \rightarrow B$ and if $X \subset B, Y \subset B$, Prove that $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

$f : A \rightarrow B$ மற்றும் $X \subset B, Y \subset B$, எனில்,
 $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ என நிரூபி.

14. Prove that the sequence $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent.

$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற வரிசை ஒருங்குகிறது என நிரூபி.

15. Prove that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ஒருங்குவதில்லை என நிரூபி.

16. If $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = L$ and $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, prove that

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = L$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ எனில்

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M \text{ என நிரூபி.}$$

17. If f and g are real valued functions, if f is continuous at 'a' and if g is continuous at $f(a)$, prove that $(g \circ f)$ is continuous at 'a'.

f மற்றும் g என்பன மெய் மதிப்பு சார்புகள்; 'a' ல் f தொடர்ச்சியானது, மற்றும் $f(a)$ ல் g தொடர்ச்சியானது எனில் 'a' ல் $(g \circ f)$ தொடர்ச்சியானது என நிரூபி.

18. If $f \in R[a, b]$ and $a < c < b$, prove that $f \in R[a, c]$;

$$f \in R[c, b] \text{ and } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

$f \in R[a, b]$ மற்றும் $a < c < b$ எனில்,

$$f \in R[a, c]; f \in R[c, b] \text{ மற்றும் } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \text{ என நிரூபி.}$$

19. State and prove Dini's theorem.

டினியின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

PART C — (4 × 10 = 40 marks)

Answer any FOUR questions

Each question carries 10 marks.

20. (a) Prove that the countable union of countable sets is countable.
(b) Prove that the set of all real numbers is uncountable.
(அ) எண்ணிடத்தக்க கணங்களின் எண்ணிடத்தக்க சேர்க்கை எண்ணிடத்தக்கது என நிரூபி.
(ஆ) எல்லா மெய்யெண்களின் கணம் எண்ணிடத்தக்க தல்ல என நிரூபி.
21. If $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$, prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$ (c,1).
 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$ எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$ (c,1) என நிரூபி.
22. (a) State and prove Schwarz inequality.
(b) State and prove Minkowski's inequality.
(அ) ஸ்குவார்ஸ் சமனின்மையை எழுதி நிரூபி.
(ஆ) மின்கோஸ்கி சமனின்மையை எழுதி நிரூபி.
23. State and prove Picard's Fixed point theorem.
பிக்கார்ட் நிலைப்புள்ளித் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

24. State and prove Taylor's formula with integral form of remainder.

தொகை வடிவ மீதியுடன் கூடிய டெய்லரின் வாய்ப்பாட்டை எழுதி நிரூபி.

25. State and prove Cauchy criterion for uniform convergence.

சீரான ஒருங்குதலுக்குரிய கோஷி நிபந்தனையை எழுதி நிரூபி.
