MAY 2011

U/ID 32356/UCMF

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

PART A — ($10 \times 3 = 30$ marks)

Answer any TEN questions.

Each question carries 3 marks.

1. If A is any non empty subset of R that is bounded below show that A has a greatest lower bound in R.

   A என்பது வெற்றல்லாத, Rன் உட்கணம். A கீழே வரம்புக்குட்பட்டதெனில் Aக்கு மீப்பெரு கீழ்வரம்பு Rல் உண்டு எனக் காண்பி.

2. If $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of non negative numbers and if $\lim_{n \to \infty} s_n = L$ prove that $L \geq 0$.

   $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது குறைவெண்களல்லாத எண்களின் வரிசை மற்றும் $\lim_{n \to \infty} s_n = L$ எனில் $L \geq 0$ என நிரூபி.

3. Prove that a convergent sequence of real numbers is bounded.

மெய்யெண்களின் ஒருங்கும் வரிசை வரம்புக்குட்பட்டதென நிரூபி.

4. Give an example of sequences $\{s_n\}$ and $\{t_n\}$ for which, as $n \to \infty$

(a) $s_n \to \infty,\ t_n \to -\infty,\ s_n + t_n \to \infty$.

(b) $s_n \to \infty,\ t_n \to \infty,\ s_n - t_n \to 0$.

(c) $\{s_n\}, \{t_n\}$ oscillating but $s_n + t_n$ diverges.

கீழ்க்கண்டவற்றுக்கு உதாரணம் கொடு.

(அ) $s_n \to \infty,\ t_n \to -\infty,\ s_n + t_n \to \infty$.

(ஆ) $s_n \to \infty,\ t_n \to \infty,\ s_n - t_n \to 0$.

(இ) $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ ஊசலாடும் வரிசைகள், ஆனால் $s_n + t_n \to \infty$ விரிவடையும் வரிசை.

5. Show that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ விரியும் தொடர் எனக் காண்பி.

6. State :

(a) The Schwarz inequality.

(b) The Minkowski inequality.

(அ) சுவாட்ஸ் சமனிலி, (ஆ) மின்கோவ்ஸ்கி சமனிலி ஆகியவற்றை கூறுக.

7. Show that union of a non empty family of open sets of a metric space M is also an open sub-set of M.

ஒரு மெட்ரிக் வெளியில் (M) திறந்த உட்கணங்களின் சேர்க்கையும் திறந்த உட்கணமாக இருக்கும் எனக் காண்பி.

8. If A and B are sets of the first category prove that $A \cup B$ is also of the first category.

A யும் B யும் முதல் வகை கணங்கள் எனில் $A \cup B$ யும் முதல் வகை என நிரூபி.

9. Let $A = [0,1]$. Which of the following subsets of A are open subsets of A ?

(a) $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ (b) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(c) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

$A = [0, 1]$. கீழ்க்கண்டவற்றுள் A ன் திறந்த உட்கணங்களைக் கண்டுபிடி.

(அ) $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ (ஆ) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(இ) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

10. If A is a closed subset of the compact metric space $\langle M, \rho \rangle$ show that the metric space $\langle A, \rho \rangle$ is also compact.

$\langle M, \rho \rangle$ என்ற கச்சித வெளியில் A ஒரு மூடிய உட்கணம் எனில் $\langle A, \rho \rangle$ என்ற மெட்ரிக் வெளியும் கச்சிதமானது எனக் காண்பி.

11. Show that $g(x) = x^2$, $(-\infty < x < \infty)$ is not uniformly continuous.

$g(x) = x^2$, $(-\infty < x < \infty)$ சீரான தொடர் சார்பு அல்ல எனக் காண்பி.

12. Find the Maclaurin series for $f(x) = e^x$ $(-\infty < x < \infty)$.

$f(x) = e^x$ $(-\infty < x < \infty)$ என்ற சார்பின் மெக்ளாரின் தொடரை எழுது.

PART B — ($5 \times 6 = 30$ marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 6 marks.

13. Show that the sequence $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent.

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற வரிசை ஒருங்கும் எனக் காண்பி.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series of real numbers. p_n are the positive terms and q_n are the negative terms of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $a_n = p_n + q_n$. Prove the following :

(a) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely then both $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ converge.

(b) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges conditionally then both $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ diverge.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது மெய்யெண்களின் தொடர். p_n, q_n முறையே $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ன் மிகை மற்றும் குறை எண்கள். மேலும் $a_n = p_n + q_n$. கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபி.

(அ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ மட்டு ஒருங்கும் தொடர் எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ ஆகிய இரண்டும் ஒருங்கும்

(ஆ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ நிபந்தனை ஒருங்கு தொடர் எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ ஆகிய இரண்டும் விரியும்.

15. Prove that in a metric space m, every convergent sequence in Cauchy. Show by an example that the converse need not be true.

ஒரு மெட்ரிக் வெளியில் (m) ஒருங்கும் வரிசையெல்லாம் காஷி என நிரூபி. ஒரு காஷி வரிசை ஒருங்கும் வரிசையாக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதற்கு உதாரணம் காண்பி.

16. If f and g are real valued functions, f is continuous at a and if g is continuous at $f(a)$, show that $g \circ f$ is continuous at a.

f, g மெய்மதிப்புள்ள சார்புகள், f a என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியானது, g, $f(a)$ ல் தொடர்ச்சியானதென்றால் $g \circ f$ a ல் தொடர்ச்சியானதென நிரூபி.

17. If M is a compact metric space prove that any family of closed subsets of M with the finite intersection property has a non empty intersection.

M ஒரு கச்சிதவெளி என்க. முடிவுறு வெட்டுக்குணம் உள்ள மூடிய கணங்களின் குடும்பத்தில் அவற்றின் வெட்டு வெற்றல்லாதது எனக் காண்பி.

18. If f is a $1-1$ continuous function from the compact metric space M_1 onto the metric space M_2, then f^{-1} is continuous on M_2.

$f : M_1 \to M_2$ ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு, f தொடர்ச்சியான சார்பானால் f^{-1} ம் M_2 வில் தொடர்ச்சியானது என நிரூபி.

19. Let ϕ be a real valued function on the closed bounded interval $[a, b]$ such that ϕ' is continuous on $[a,b]$. Let $A = \phi(a)$, $B = \phi(b)$. If f is continuous on $\phi([a, b])$ prove that

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_a^b f[\phi(u)]\ \phi'(u)\,du.$$

$[a,b]$ல் ϕ ஒரு மெய்மதிப்புள்ள சார்பு, ϕ' $[a, b]$ல் தொடர்ச்சியானது $A = \phi(a)$, $B = \phi(b)$ என்க. f என்பது $\phi([a, b])$ல் தொடர்ச்சியானதெனில் $\int_A^B f(x)\,dx = \int_a^b f[\phi(u)]\ \phi'(u)\,du$ என நிரூபி.

PART C — (4 × 10 = 40 marks)

Answer any FOUR questions.

Each question carries 10 marks.

20. If $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ and sequences of real numbers and if $\underset{n \to \infty}{Lt}\ s_n = L$, $\underset{n \to \infty}{Lim}\ t_n = M$, $M \neq 0$ show that $\underset{n \to \infty}{Lim}\ \frac{s_n}{t_n} = \frac{L}{M}$.

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஆகியவை மெய்யெண்களின் வரிசைகள். $\underset{n \to \infty}{Lt}\ s_n = L$, $\underset{n \to \infty}{Lim}\ t_n = M$, $M \neq 0$ எனில் $\underset{n \to \infty}{Lim}\ \frac{s_n}{t_n} = \frac{L}{M}$ என நிரூபி.

21. If $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of positive numbers such that

(a) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 > \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$

and

(b) $\underset{n \to \infty}{Lim}\ a_n = 0$

then show that $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ a_n$ is convergent.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற மிகை எண்களின் தொடரில்

(அ) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 > \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$

மற்றும்

(ஆ) $\underset{n \to \infty}{Lim}\ a_n = 0$ என்றிருந்தால் $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ a_n$ ஒருங்கும் எனக் காண்பி.

22. Show that the real valued function f is continuous at $a \in R'$ if and only if

$$\underset{n \to \infty}{Lim}\ x_n = a \Rightarrow \underset{n \to \infty}{Lim}\ f(x_n) = f(a).$$

f என்ற மெய் மதிப்புள்ள சார்பு $a \in R'$ ல் தொடர்ச்சியாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$ எனக் காண்பி.

23. Let $\langle M, \rho \rangle$ be a complete metric space. If T is a contraction on M prove that there is one and only one point x in M such that $T_x = x$.

$\langle M, \rho \rangle$ என்பது முழுமையான மெட்ரிக் வெளி. M ல் T ஒரு எனில் $T_x = x$ என்றிருப்பது போல் M ல் ஒரே ஒரு x உள்ளது என நிரூபி.

24. If f is continuous on the closed bounded interval $[a, b]$ and if $F[x] = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a \le x \le b)$ show that $F'(x) = f(x),\ a \le x \le b$.

$[a, b]$ல் f ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு, $F[x] = \int_a^x f(t)\,dt$ $(a \le x \le b)$ எனில் $F'(x) = f(x), \quad a \le x \le b$ எனக் காண்பி.

25. Let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of continuous real valued functions on the compact metric space $\langle M, \rho \rangle$ such that

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots x \in M .$$

If $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges pointwise on M to the continuous function f prove that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly to f on M.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது $\langle M, \rho \rangle$ என்ற கச்சித வெளியின் மேல் உள்ள மெய்மதிப்புள்ள தொடர்ச்சியான சார்புகளின் வரிசை மற்றும் $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots x \in M$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, f என்ற தொடர்ச்சியான சார்புக்கு புள்ளி வாரியாக ஒருங்கினால் அச்சார்புக்கு சீராகவும் M -ல் ஒருங்கும் என நிரூபி.