(7 pages)

MAY 2011 **U/ID 32355/UCME**

Time : Three hours Maximum : 100 marks

PART A — ($10 \times 3 = 30$ marks)

Answer any TEN questions.

1. If H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G, show that $H \cap N$ is a normal subgroup of H.

   G என்ற குலத்தில் H உட்குலம், N நேர்மை உட்குலம் எனில் $H \cap N$, H –ல் நேர்மை உட்குலம் என நிரூபி.

2. Define automorphism of a group. Give an example.

   குலத்தின் தன் ஒப்புமையை வரையறுத்து எடுத்துக்காட்டு தருக.

3. Let G be the set of all 2×2 matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ where $ad \neq 0$ under matrix multiplication. Let $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ prove that N is a normal subgroup of G.

$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \; ad \neq 0 \right\}$ அணிகளின் பெருக்கலைப் பொறுத்து G ஒரு குலம் மற்றும் $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ எனில் N ஒரு நேர்மை உட்குலம் என நிரூபி.

4. Find the orbit and cycles of $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ –ன் ஒழுக்கு மற்றும் சுழல்களைக் காண்க.

5. Determine the conjugacy class of (1, 2) in S_3.

S_3 –ல் உள்ள (1, 2) –ன் இணையிய வகுப்பைக் காண்க.

6. Define a division ring. Give an example.

வகுத்தல் வளையம் – வரையறு. எடுத்துக்காட்டு ஒன்றும் தருக.

7. Find all ideals of the ring $(z_6, +_6, \cdot_6)$.

$(z_6, +_6, \cdot_6)$ என்ற வளையத்தின் எல்லா சீர்மங்களையும் கண்டுபிடி.

8. Prove that (1, 0, 0), (1, –1, 0), (0, 0, 2) are linearly independent in $R^{(3)}$ where R is the set of reals.

R என்பது மெய்யெண்களின் கணம் $R^{(3)}$–ல் (1, 0, 0), (1, –1, 0) மற்றும் (0, 0, 2) என்பது நேரியல் சார்பற்றவை என நிறுவுக.

9. Define inner product space. Give an example.

உள் பெருக்கல் வெளியின் வரையறை தருக. எடுத்துக்காட்டும் தருக.

10. If V is finite dimensional over f and if $T \in A(V)$ is singular, then there exist an $S \neq 0$ in $A(V)$ such that $ST = TS = 0$.

V என்பது முடிவுறு அடிமாணம் உடையது மற்றும் $T \in A(V)$ மற்றும் ஒருமையானது எனில் $ST = TS = 0$ என்று அமையுமாறு $A(V)$–ல் S ஐக் காண முடியும் என்று நிரூபி.

11. If $T, S \in A(V)$ and if S is regular, prove that T and $ST\,S^{-1}$ have the same minimal polynomial.

$T, S \in A(V)$ மற்றும் S ஒழுங்குடையது எனில் T மற்றும் $ST\,S^{-1}$ என்பது ஒரே சிறும பல்லுறுப்புக் கோவை உடையன என நிறுவுக.

12. Let $T \in A(R^2)$ find the matrix of T defined by $T(x, y) = (2x + 3y, 4x - y)$ with respect to the basis (1, 0) and (0, 1).

$T \in A(R^2)$ மற்றும் $T(x, y) = (2x + 3y, 4x - y)$. (1, 0) மற்றும் (0, 1) உடைய அடிமாணத்தைப் பொறுத்து T –ன் அணியைக் காண்க.

PART B — (5 × 6 = 30 marks)

Answer any FIVE questions.

13. If G is a finite group and N is a normal subgroup of G, prove that $O\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{O(G)}{O(N)}$.

G என்ற முடிவுறு குலத்தின் ஒரு நேர்மை உட்குலம் N எனில் $O\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{O(G)}{O(N)}$ என்று நிறுவுக.

14. Show that Kernel of a group homomorphism is a normal subgroup.

ஒரு குல செயலொப்புமையின் உட்கரு ஒரு நேர்மை உட்குலமென நிறுவுக.

15. Let ϕ be a homomorphism of G onto $\overline{G}$ with Kernel K. Let $\overline{N}$ be a normal subgroup of $\overline{G} * N = \{x \in G / \phi(x) \in \overline{N}\}$. Prove that $\frac{G}{N} \approx \frac{\overline{G}}{\overline{N}}$.

$\phi : G \to \overline{G}$ குல ஒப்புமை மற்றும் K அதன் உட்கரு. $\overline{N}$ என்பது $\overline{G}$ ன் நேர்மை உட்குலம். மேலும்

$N = \{x \in G / \phi(x) \in \overline{N}\}$

எனில் $\dfrac{G}{N} \approx \dfrac{\overline{G}}{\overline{N}}$ என்று நிறுவுக.

16. Prove that $N(a)$ is a subgroup of G.

$N(a) - G$ ன் உட்குலம் என நிரூபி.

17. Let R be a commutative ring with unit element and M an ideal of R. If $\dfrac{R}{M}$ is a field prove that M is a maximal ideal of R.

R ஒரு அலகு உடைய பரிமாற்று வளையம். M அதன் சீர்மம் ஆகும். $\dfrac{R}{M}$ ஒரு களம் எனில் M ஒரு மீப்பெரு சீர்மம் என்று நிரூபி.

18. Let R be a Euclidean ring. Suppose that for $a, b, c \in R$, a / bc but $(a, b) = 1$. Then prove that a / c.

R என்பது யூக்லிடியன் வளையம். $a, b, c \in R$–ல் a / bc மற்றும் $(a, b) = 1$ எனில் a / c என நிரூபி.

19. Prove that any two finite dimensional vector spaces over F of the same dimension are isomorphic.

முடிவுறு அடிமாணம் கொண்ட வெக்டர் வெளியில் சமமான அடிமாணம் கொண்டவை எனில் அவை ஒப்புமை உடையன என நிரூபி.

PART C — (4 × 10 = 40 marks)

Answer any FOUR questions.

20. State and prove Cayley's theorem.

கெய்லியின் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

21. Derive class equation.

வகுப்புச் சமன்பாட்டை வருவிக்க.

22. Show that for a prime p, $(2_p, +_p, \cdot_p)$ is a field.

p ஒரு பகா எண் எனில் $(2_p, +_p, \cdot_p)$ ஒரு களமென நிறுவுக.

23. State and prove unique factorization theorem on Euclidean ring.

யூக்லிடியன் வளையத்தில் ஒரே காரணி தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

24. If V is a finite-dimensional inner product space, prove that V has an orthonormal basis.

V என்பது முடிவுறு அடிமாணம் உடைய ஒரு உள்பெருக்கல் வெளி V க்கு ஒரு நெறிம செங்குத்து அலகு படிமாணம் உள்ளது என நிறுவுக.

25. If V is n-dimensional over F and if $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F prove that T satisfies a polynomial of degree n over F.

V என்பது F–ல் முடிவுறு அடிமாணம் உடையது $T \in A(V)$ –ன் எல்லா சிறப்பு மூலங்களும் F–ல் உள்ளன எனில் T ஆனது F–ல் n படி உடைய பல்லுறுப்புக் கோவையை நிறைவு செய்யும் என்று நிரூபி.